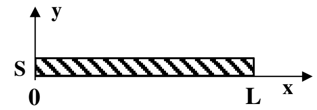
Esercizio n.1 [10 punti]

Nello spazio è posta una sottile sbarretta di materiale dielettrico di sezione S e lunghezza L. La sbarretta è polarizzata longitudinalmente con Polarizzazione P = P_x= ax^2+b. Si chiede di calcolare esplicitamente: 1) Le densità delle cariche di polarizzazione. 2) La carica totale di polarizzazione. In un secondo momento alla sbarretta viene applicato un campo elettrico costante E=E_y che non modifica sensibilmente la polarizzazione della sbarretta. 3) Calcolare il momento della forza che agisce sulla sbarretta.

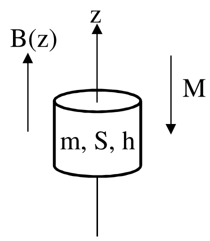


Dati: S = 1 cm^2 ; L =10 cm ; a = 1 10^{-4} C/m^4; b = 1 10^{-6} C/m^2 ; E_y = 3 10^5 V/m.

La densità superficiale di carica è: $\sigma = \bar{P}\cdot\bar{n} \quad da\ cui\ \sigma(0) = -b \quad ; \ \sigma(L) = aL^2 - b$
La densità superficiale di volume è: $\rho = -div\bar{P} = -\frac{\partial P}{\partial x} = -2ax$
La carica totale – che DEVE venire uguale a zero – è $Q = \int \rho dV + (\sigma(0) + \sigma(L))S = -S\int_0^x 2axdx + aSL^2 = 0$
Il Momento della forza sarà $\bar{M} = \bar{p} \times \bar{E}$ dove $\bar{p}$ è il momento di dipolo della sbarretta.
Il momento di dipolo totale si può calcolare dalla polarizzazione (momento di dipolo per unità di volume):
$p_x = \int Pd\tau = s\int_0^L (ax^2 + b) = SL(\frac{1}{3}aL^2 + b)$ da cui $\bar{M} = ESL\left(\frac{1}{3}aL^2 + b\right) = 4\cdot 10^{-6}\ Nm.$
Il momento di dipolo totale si può calcolare anche scrivendo esplicitamente il momento come: $p_x = \int \rho x d\tau + \int \sigma x dS$ mentre il momento può essere calcolato anche integrando i momenti elementari $dM = dF_E \cdot x$ dovuti alle densità delle cariche di polarizzazione, usando come polo l'origine: $dM_\rho = -E\cdot dq \cdot x$ da cui si ha $M_\rho = -ESL\left(2a\frac{L^2}{3}\right)$ mentre $M_\sigma = ESL(aL^2 + b)$. I risultati ovviamente non cambiano.

Esercizio n.2 [10 punti]

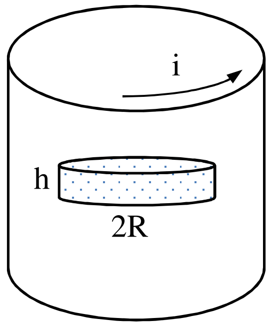
Consideriamo un piccolo magnete permanente di massa m e forma cilindrica (Sezione S, altezza h) libero di scorrere lungo un asse verticale che passa per il suo asse. Il magnete è caratterizzato da una Magnetizzazione M diretta verso il basso, ed è sottoposto ad un campo B che varia con l'altezza secondo la legge $B(z) = a/(b+z)$. Si calcoli la posizione di equilibrio del magnete. Si assuma che il magnete sia di piccole dimensioni rispetto alla scala di variabilità del campo B.



Dati: m = 10 g ; S = 1 cm^2 ; h = 1 cm ; |M| = 9 · 10^6 A/M ; a = 0,1 T· cm ; b = 5 cm ; g= 10 m/s^2.

La magnetizzazione è il momento magnetico per unità di volume, quindi il momento magnetico totale sarà $\bar{\mu} = -MSh\,\hat{z}$.
La forza dovuta al campo Magnetico sul cilindro sarà: $F_z = [\bar{\mu}\cdot\nabla\bar{B}]_z = -\mu_z \cdot \frac{\partial B}{\partial z} = -MSh\left(-\frac{a}{(b+z)^2}\right)$.
L'equilibrio si avrà quando questa forza sarà uguale e contraria alla forza peso, quindi per: $\left(\frac{aMSh}{(b+z^*)^2}\right) = mg$
da cui $z^* = \sqrt{\frac{aMV}{mg}} - b \cong 30\ m$

Esercizio n.3 [10 punti]



All'interno di un solenoide indefinito, con **n** spire per unità di lunghezza, è posto un disco conduttore di conducibilità elettrica **σ**, raggio **R** ed altezza **h**. Se la corrente che scorre nel solenoide varia nel tempo secondo la legge **i(t)=at**, si calcoli la potenza dissipata nel disco per effetto Joule da parte delle correnti indotte, trascurando l'effetto di queste sul campo magnetico.

Dati: n = 10^6 m^{-1} ; σ = 8 · 10^7 $(\Omega\ m)^{-1}$; R = 1 cm ; h = 4 mm ; a= 1 A/s

Il campo magnetico creato dalla corrente i dentro il solenoide, sarà $B(t) = \mu_0 n\ i(t) = \mu_0 n\ at$

La ddp indotta su di una circonferenza di raggio r sarà: $V(r) = -\frac{d\emptyset(B)}{dt} = -\pi r^2 \mu_0 n\ a.$

La potenza infinitesima dissipata in una resistenza circolare infinitesima dR ad una distanza r dal centro sarà:

$$dP = V(r)^2/dR \text{ dove } dR = \frac{1}{\sigma}\frac{2\pi r}{hdr}.$$

La potenza dissipata totale sarà quindi, integrando su tutta la circonferenza:

$$P = \int_0^R \frac{V(r)^2}{dR} = [\mu_0 n\ a]^2 \int_0^R \frac{\pi r^3 \sigma h}{2} dr = [\mu_0 n\ a]^2 \frac{\pi R^4 \sigma h}{8} \cong 2\ mW$$